Herzyk

138.1

~~633-1~~

~~18~~

BREVIS THEORIA
MOTUS
CORPORUM
PROJECTORUM
IN MEDIO NON RESISTENTE,
VIRIBUS CENTRALIBUS AGENTIBUS IN RATIONE
RECIPROCA DUPLICATA DISTANTIARUM,

Publicæ demonſtrationi expoſita in RADIVILIANO
Collegio NESVISIENSI Societatis JESU

PRÆSIDE

P. JOANNE HERCYK Soc: JESU
Philosophiæ & Matheseos Profeſſore

ANNO · M DCC LX VI.
Typis RADIVILIANIS Colleg: Nesv: Soc: JESU

PRÆFATIO

NUllum aliud fortasse est thema, quod plures commentatores nactum sit, quam quod in præsens experimenti publici gratiâ à discipulis meis demonstrandum elegi. Diversi Authores, dum hanc materiam tractant, diversum scopum sibi præfixêre: alii artis Ballisticæ perfectionem; alii virium centralium Theoriam explicatiùs tradendam: alii motus corporum cælestium ex legibus gravitatis universalis explicandos, alii alia utilissimè intendebant. Placuit mihi Philosophicas & Mathematicas disciplinas junctim tradenti postremum, eò maxime, quod & Physico--Mathematicum sit, & non ita pridem nactum sit eximium ad captum Tyronum explanatorem P. Carolum Scherfer Soc: JESU, Præceptorem quondam meum, virum in Mathematicis & Philosophicis disciplinis hoc ævo omnium opinione nulli secundum, cujus doctrinam ut in prælectionibus meis maximè secutus sum, ita hanc in rem selecta ejus theoremata & problemata publici juris facere è re discentium in Scholis nostris censui.

DE

Motu corporum projectorum in medio non resistente viribus centralibus agentibus in ratione reciproca duplicata distantiarum.

§. I.

DEFINITIONES.

1. *Vis motrix*, aut *vis*, est principium motus, seu id, ex quo motus corporis dependet.

2. *Linea directionis*, vel *directio*, est ea linea, juxta quam fertur corpus dependenter ab actione vis motricis.

3. *Directiones* (& consequenter etiam motus) *oppositæ* sunt, quæ in partes contrarias sibi in directum jacent.

Scholium. Cum idem corpus in plagas oppositas simul ferri nequeat, imo nec simul duabus quibuscunque viis incedere, patet, non posse cum actuali motu duas directiones diversas consistere, sed vel alterutram, vel utramque debere elidi, vel si componi possint, ex pluribus unam fieri. Compositionis ejusmodi exempla infinita in natura prostant: v. g. dum quis navi vectus ab uno latere navis versus alterum progreditur, simul motu navis versus proram fertur, & motum compositum habet.

4. *Tempus* semper id sumitur, quo motus durasse supponitur.

5. *Spatium* est illa linea, quam corpus instar puncti consideratum (vel vero corporis centrum) percurrit.

6. *Celeritas*, vel *velocitas* est ea motus affectio, qua fit, ut corpus certo tempore certum spatium percurrat.

Scholium. Unde non potest exprimi, nisi per certam mensuram spatii, quod intra tempus datum percurritur a mobili. v. g. si corpus A intra 1" conficit 4 pedes, & corpus B intra idem tempus 6 pedes, erit celeritas corporis A ut 4, seu $=4$, & mobilis B celeritas ut 6, seu $=6$.

7. *Motus æquabilis* est, cujus celeritas semper manet eadem; *acceleratus*, cujus celeritas crescit; *retardatus*, qui fit celeritate decrescente. Si incrementa & decrementa celeritatis temporibus æqualibus æqualia sunt, motus est *uniformiter* acceleratus & retardatus.

 Hypothe-

Hypothesis. Datur vis inertiæ in corporibus, qua statum quietis, vel motus uniformis in directum conservare conantur, & in vires externas reagunt, quæ ea a statu priore deturbare nituntur.

Hinc sequuntur leges motus, quarum 1ma est: corpus omne perseverat in statu quietis vel motus uniformis in directum, nisi quando ab aliis causis statum mutare cogitur.

2da: Mutatio motus proportionalis est vi impressæ, & fit secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.

3tia: Actioni contraria semper, & æqualis est reactio: sive corporum duorum, aut virium quarumvis, actiones in se mutuo, semper sunt æquales, & in partes contrarias diriguntur.

Æstimari itaque debet actio, & reactio in eadem semper linea.

THEOREMA I.

Si celeritas mobilis motu uniformi lati multiplicetur per tempus, quo durat motus, factum exprimit spatium a mobili confectum.

Demonstr. Cum enim celeritas exprimatur per mensuram spatii, quod intra tempus datum a mobili percurritur (per def. 6. & ejus Schol.), manifestum est, ut obtineatur spatium intra aliud quodvis tempus percurrendum, debere hanc mensuram toties accipi, quoties tempus mensuræ in tempore illo alio continetur; hoc vero nihil aliud est, quam celeritatem mobilis multiplicare per tempus; igitur &c.

V. g. sit ea celeritas mobilis, ut intra 1" conficiat 4 pedes; duret vero motus 7"; mobile conficiet 28. pedes. Si sit tanta celeritas, ut intra 1" conficiat 6 pedes, & motus duret 8", universim percurret 48 pedes. In primo enim casu conficit septies quatuor, in altero octies sex pedes: sed eadem facta sunt, si in primo casu celeritatem ut 4 ducam in tempus 7; in altero celeritatem 6 multiplicem per tempus 8. Quod cum universim subsistat, si celeritas dicatur $= c$, tempus $= t$, spatium $= s$, erit semper $ct = s$.

Coroll. I. Si porro detur aliud mobile, cujus celeritas $= C$, tempus $= T$, spatium $= S$, erit ob eandem rationem $CT = S$. Unde $S : s = CT : ct$; hoc est, spatia motu æquabili percursa, sunt in ratione composita directa temporum, & celeritatum.

Coroll.

Coroll. II. Quia $CT = S$, erit $C = \frac{S}{T}$, & $T = \frac{S}{C}$, seu celeritates sunt in ratione directa spatiorum, & reciproca temporum; tempora item in ratione directa spatiorum & reciproca celeritatum.

Coroll. III. Si tempora sint eadem, erit $C : c = S : s$; & si eadem sit mobilium celeritas, $T : t = S : s$; hoc est, in priore casu sunt celeritates ut spatia; in posteriore spatia ut tempora.

Coroll. IV. Quoniam omnis quantitas per lineam rectam repræsentari potest, si tempus exhibeatur per lineam AD (fig. 1.) & celeritas per lineam BA, tempus in celeritatem ductum, sive spatium repræsentabitur per rectangulum ABCD; & ratio spatiorum erit eadem, quæ rectangulorum, quorum latus unum, tempus, alterum celeritatem exhibet. Fig: 1.

THEOREMA II.

Si corpus impellatur a duabus viribus non oppositis, quæ sunt ut latera cujusdam parallelogrammi, describet motu composito diagonalem.

Demonstr. 1mo Concipiatur corpus aliquod (fig. 2.) in D constitutum, & planum CD eodem tempore accedendo ad AB conficere spatium CB, quo planum AD accedendo ad CB conficit spatium AB. Certum est, dum planum DA fuerit in EF, planum CD fore in HG (quia per hypothesin debet esse $AB : AF = CB : CG$), adeoque angulum D in L. Quod si plures ejusmodi lineæ ducantur, angulus D successive totam diagonalem DB percurret. Et quoniam planum DC agit in corpus D (quod instar puncti consideramus) plano hoc in HG existente, etiam corpus D erit in linea HG. Eodem modo planum DA corpus D ad lineam EF propellet, dum illuc usque pervenerit. Cum igitur dicta plana simul ad has lineas perveniant, ut fert hypothesis, corpus D simul erit in linea utraque, hoc est, in intersectione L, sive concursu planorum. Quod cum de quovis puncto L in recta DB sito eodem ratiocinio ostendatur, evidens est, corpus D percursurum diagonalem DB eodem tempore, quo a plano DA propelleretur per DC, vel a plano DC per DA, si singula plana seorsim agerent. Fig: 2.

2do. Sed non minus manifestum est, posse corpus eodem modo dirigi, dum in D existit, ab aliis viribus juxta lineas DA, DC agentibus; nam primo momento, quo eæ vires applicantur, jam determinatur corpus ad initium diagonalis describendum, non secus, ac ab ipsis planis, de quibus diximus: atqui per Leg. 1 conservat suum statum, in quo semel est positum; igitur etiam postea, dum vires illæ non amplius agunt, viam cæptam persequitur, sive diagonalem describit.

Coroll. I. Quoniam quævis linea esse potest diagonalis alicujus parallelogrammi, & repræsentare motum corporis; quivis motus spectato effectu, quem præstat, considerari potest ut compositus ex duobus aliis, quos latera parallelogrammi exprimunt. Licet enim in se motus ille sit simplex, nec a pluribus causis productus, quantitas tamen eadem est, si ad directionem, & effectum præsentem referatur: sicut, si solam quantitatem attendamus, idem prorsus est, sive accipiatur quaternarius, sive numerus senarius subtracto binario, sive ternarius addita unitate, cum sit $4 = 6 - 2 = 3 + 1$.

Coroll. II. Quia motum compositum repræsentat diagonalis, quæ minor est, quam summa duorum laterum, patet, motum semper concipi debere compositum ex viribus, quarum pars destruatur, pars addatur altera alteri. Et nisi hoc esset, profecto dum duo corpora sub aliquo angulo effecto a lineis CB, AB concurrunt, unum ab A versus B, alterum a C versus B, nulla esset actio, neque mutatio viarum (per Leg. I & III). Quoniam vero facto conflictu mobile in diagonali perstat, evidens est, eas vires motrices destructas fuisse, quæ utrinque declinassent a diagonali, nisi conflictus intercessisset; eas autem residuas mansisse, quæ agunt juxta diagonalem. Et quia quantitas, qua discessus fit a diagonali, desumitur a perpendiculari ad eandem, vires destructæ perpendiculares exhiberi debent ad diagonalem. Sunt denique hæ vires destructæ æquales; altera enim si major fuisset altera, mobile ultra diagonalem impulisset. Sic si resolvendæ sint vires DC & DA, ex quarum compositione diagonalis DB describitur, tanquam compositæ ex DO (= ZC) & DZ; item DM & DN (= MA) repræsentandæ sunt. Sic enim æquales & oppositæ DZ & DM se se elidunt, & residuæ DO + DN æquantur compositæ DB.

Observa. Nomine *virium acceleratricium* speciatim intelliguntur illæ, quæ singulis momentis agunt in corpora, uti sunt vires attractive ctivæ, & repulsivæ. Constantes quid sint, & variabiles, opus non est, ut explicetur.

Verum ex ipsa harum virium natura immediate sequitur 1mo, quod tempore infinite parvo non possint nisi gradum infinite parvum celeritatis efficere, sed tempore finito opus sit, ut corpus celeritatem finitam acquirat. Si enim tempore infinite parvo (quod infinites continetur in quovis tempore finito utcunque parvo) corpus acquireret celeritatem finitam, cum (per leg. I motus) celeritatem acquisitam conservat, elapso tempore finito haberet gradus finitos, sed numero infinitos, celeritatis, hoc est, celeritatem infinite magnam, quod absurdum.

Secundo infertur, quod vis acceleratrix utcunque variabilis tempore infinite parvo censenda sit constans. Cum enim tempore infinite parvo mutatio ejus, a quo variatio ipsius vis pendet, non nisi infinite parva fieri possit, etiam mutatio actionis illius vis respectu actionis, quam habet in initio tempusculi infinite parvi, debet esse infinite parva; igitur sicut differentia infinite parva. v. g. distantiæ, respectu distantiæ finitæ nulla est; ita differentia actionis respectu actionis, quam vis exerit ab initio tempusculi infinite parvi, evanescit.

Tertio, quod de viribus acceleratricibus dictum est, id applicari etiam debeat suo modo retardatricibus, utpote cum series quæcunque decrescens considerari possit ut crescens, modo termini invertantur.

THEOREMA III.

Spatia motu uniformiter accelerato diversis temporibus ab eodem mobili, vel a diversis, sed iisdem viribus acceleratricibus agentibus, descripta, sunt ut quadrata temporum, vel celeritatum.

Demonstr. Repræsentet in triangulo AIK (fig. 3.) linea AI Fig: 3. tempus, quod concipiatur divisum in partes indefinite parvas & æquales AD, DL, LB &c, & ductæ intelligantur DF, LH, BC &c ad IK parallelæ. Quoniam in motu uniformiter accelerato celeritas crescit ut tempus (per def. 7.), & ob similitudinem triangulorum ADF, ALH, ABC est AD: DF = AL: LH, vel AD: AL = DF: LH, ac præterea AD & AL exprimunt partes temporis; lineæ DF, LH repræsentant celeritates in fine tempusculorum AD, AL acquisitas. Jam quia tempusculis AD, DL infinite parvis motus uniformis est, spatia singulis descripta exhibebuntur parallelogrammis AEFD, DGHL, & sic deinceps, horum autem numero in infinitum

aucto

aucto, & lateribus AD, DL in infinitum decrescentibus, summa omnium non differt a triangulo AIK: unde spatium tempore AI descriptum recte exprimetur per triangulum AIK, & quod a mobili tempore quovis alio AB percurritur, per triangulum ABC. Est vero ABC ad AIK (cum similia sint) ut AB^2 ad AI^2, vel ut BC^2 ad IK^2, hoc est, spatia motu uniformiter accelerato descripta viribus iisdem acceleratricibus, sunt inter se vel ut quadrata temporum, vel ut quadrata celeritatum.

Coroll. I. Si mobile tempore AI fuisset motum celeritate constante IK, quam acquisivit in fine temporis] AI, spatium descriptum fuisset AI X IK (per Theor. I.) quod est duplum trianguli AIK repræsentantis spatium motu uniformiter accelerato eodem tempore percursum. Unde si spatium motu uniformiter accelerato descriptum dicatur $= s$, tempus $= t$, celeritas finalis $= c$,

erit $s = \frac{ct}{2}$, $c = \frac{2s}{t}$, $t = \frac{2s}{c}$.

Coroll. II. Quia tempora æquabiliter fluunt, crescunt ut numeri naturales 1, 2, 3, 4 &c; & in eadem ratione crescunt celeritates; spatia vero ut quadrata horum numerorum 1, 4, 9, 16 &c.

Coroll. III. Cum tempore uno conficiatur spatium ut 1, duobus ut 4, tribus ut 9 &c, erit spatium tempore primo confectum $= 1$, quod 2do absolvitur, ut 3, quod tertio, ut 5 &c; igitur temporibus singulis æqualibus, sibique ab initio motus succedentibus confecta spatia progrediuntur ut numeri 1, 3, 5, 7 &c.

Coroll. IV. Ulterius infertur, quod cum spatia crescant ut quadrata temporum, dum vis acceleratrix est eadem, & per se evidens sit, spatia quoque crescere crescentibus viribus acceleratricibus, aut his decrescentibus etiam spatia decrescere, universim (si vis acceleratrix sit $= v$, spatium $= s$, tempus $= t$) fit $s = vtt$;

& $v = \frac{s}{tt}$, $t = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}}$. Præterea est (coroll. I) $c = \frac{2s}{t}$; & jam

habemus $t = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}}$: igitur si hic valor in priore formula substituatur,

fiet $c = \frac{2s\sqrt{v}}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{sv}$.

§ II.

§. II.

Lemma I. *Si in ellipsi vel hyperbola ducatur per centrum* C (fig. 4. & 5) *parallela ad tangentem* TMX, *ea intercipit inter* E *&* M, *ex recta, quae e foco* f (fig. 5.) *vel* F (fig. 4.) *ad* M *ducitur, partem semiaxi principali aequalem.* Fig: 4 & 5.

Demonstr. Sit (fig. 4.) KCD ad XT, tangentem ellipseos in M, parallela, conjungatur M cum f & F; fiat item normalis MN, cui in O occurrat fQ ad KD vel TX parallela. Quoniam fMT $=$ XMQ, & MfO $=$ TMf, nec non MQO $=$ XMQ, etiam est MfO $=$ MQO; & cum praeterea QMO $=$ OMf, triangula QOM, fOM similia & aequalia sunt, ac propterea Mf $=$ MQ. Est autem FM $+$ Mf $=$ sS axi principali, & quia FC $=$ Cf, & CE ad fQ parallela, etiam FE $=$ EQ: unde EQ est semidifferentia inter Mf (vel QM) & MF, quae proinde addita ad MQ constituet semisummam rectarum FM & Mf.

Sit (fig. 5) CQ ad XT parallela, ducatur per F & M indefinita, quae in Q & H occurrat rectis CQ, fH ad eandem XT parallelis. Anguli TMH, XMf inter se aequales, aequantur suis alternis MHf, MfH: igitur fM $=$ MH. Dein quia fC $=$ CF, etiam est HQ $=$ QF. Est vero fM — FM $=$ sS, & $\frac{1}{2}f$M (vel $\frac{1}{2}$HM) — $\frac{1}{2}$FM $=$ CS, hoc est, $\frac{1}{2}$MH — $\frac{1}{2}$FM $=$ $\frac{1}{2}$HQ $+$ $\frac{1}{2}$QM — $\frac{1}{2}$FM $=$ $\frac{1}{2}$FQ $+$ $\frac{1}{2}$QM — $\frac{1}{2}$FM $=$ $\frac{1}{2}$QM $+$ $\frac{1}{2}$MF $+$ $\frac{1}{2}$QM — $\frac{1}{2}$FM $=$ QM $=$ CS. Atqui ob QE parallelam ad fH, & Mf $=$ MH, est QM $=$ EM; igitur &c.

Lemma II. *Si e puncto intersectionis* N, *ubi normalis occurrit axi sectionis conicae, ducatur* NB *ad* FM *perpendicularis, est* MB *aequalis semiparametro axeos.*

Demonstr. Nam in ellipsi (fig. 4) triangula NBM, EMR ad B & R rectangula, ob communem angulum ad M, sunt similia; igitur MB: MN $=$ MR: ME vel CS (per Lem. I); Consequenter CS X MB $=$ MN X MR. Est vero MN X MR $=$ CL2, cui itidem aequale est factum ex semiaxe majore in semiparametrum, quare MB semiparameter esse debet.

In Hyperbola (fig. 5) similia sunt triangula MRQ, MBN propter angulos æquales ad verticem M, & rectos ad R & B: igitur RM: MQ (vel CS per lem. I) = MB: MN. Unde rursus habetur RM X MN = CL^2 = CS X MB, & MB æqualis semiparametro.

Fig: 6. Denique in parabola res manifesta est. Cum enim (fig 6) FM = FN, ex natura hujus curvæ, angulus ad F communis, ad P & B recti, triangula FMP, FNB similia & æqualia sunt, consequenter FP = FB. Unde ab æqualibus, ablatis æqualibus, manet PN = BM. Est autem notissima proprietas parabolæ, quod PN (subnormalis) æquetur semiparametro; ergo eidem æqualis est BM.

Coroll. I. Ex his eruitur facilis methodus determinandi radium osculi data normali sectionis conicæ & foco; & vicissim dato radio osculi & chorda per focum transeunte, inveniendi normalem.

Fig: 7. Nam (fig 7) cum normalis necessario incidat in radium curvaturæ, utpote cum tam hic, quam illa sit tangenti ad idem punctum M perpendicularis; & radius osculi in omnibus sectionibus conicis æquetur cubo normalis diviso per quadratum semiparametri; sit vero per demonstrata Lem. II MB semiparameter, erit

$MC = \frac{MN^3}{MB^2}$; hinc $MB^2 : MN^2 = MN : MC$; seu (si ex N erigatur ad MC perpendiculum occurens in L rectæ FM) MB: MN = MN: ML, adeoque $MB^2 : MN^2$ = MB: ML, sive MB: ML = MN: MC. Atqui cum ad B, & proin etiam ad L, sit rectus, fieri non potest, ut MC sit radius circuli, nisi sit ML = $\frac{1}{2}$MV: invenitur itaque ex hac proportione tam radius osculi, quam dimidia chorda ML per focum F transiens.

Coroll. II. Vicissim dato radio osculi, & foco sectionis, reperitur normalis MN. Data namque MC, & puncto F, datur MV, & ML. Sunt autem triangula MBN, MLC similia: quare cum sit $BM^2 : MN^2$ = MN: MC, erit quoque $ML^2 : MC^2$ = MN: MC; unde habetur $MN = \frac{ML^2}{MC}$. Nulla ergo alia re opus est, quam ut ex L demittatur ad MC perpendiculum LN, quod abscindet MN.

Lemma

Lemma. III. *Si chorda* MV (fig. 7, 8, 9, 10,) *dividatur in* D, *ut sit* MD = $\frac{1}{4}$MV, *& conjungatur* D *cum* N, *erit* DN *parallela ad* M f *per focum alterum* f *transeuntem.* Fig: 7. 8. 9 & 10.

Dem. Nam angulum FM*f* normalis MN in omni sectione conica (si fig. 9 in hyperbola substituatur externus DM w) secat bifariam, consequenter DMN = NM*f* (vel in hyperbola NM w). Dein quia LN ad MN perpendicularis, & LD = DM, etiam est DN = DM, & DNM = DMN = NM*f*, hoc est, DN, M*f* (vel M w) sunt parallelæ.

Coroll. I. Est ergo in ellipsi (fig. 7 & 8) FD: DN = FM: M*f*, hoc est, FD: DM = FM: M*f*, & componendo FD: FD + DM (= FM) = FM: M*f* + FM (= S*s*). Quare si (fig. 8) producatur FM, ut sit FD: FM = FM: FE, & ex E demissum perpendiculum in tangentem EQ producatur, donec EQ = Q*f*, erit *f* alter focus, per quem producta FN transit. Est enim hoc ipso ME = M*f*, & FE = S*s*.

Coroll. II. In hyperbola (fig. 9) F jacet respectu M supra D; est tamen ob triangula DFN, FM*f* similia, DF: DN (vel DM) = FM: M*f* & divisim DF: DM — DF (seu FM) = FM: M*f* — FM (vel *s*S). Quod si itaque sumatur FE ex eadem parte cum D in recta MV, ut sit DF: FM = FM: FE, & ex E in QM demissa perpendicularis EQ producatur, ut fiat EQ = Q*f*, habebitur focus *f*, & axis transversus FE = S*s*. Fig: 9.

Coroll. III. In parabola (fig. 10.) fit M*f* = ∞. Quod si igitur supponatur esse FD: FM = FM: ∞, necesse est, ut FD evanescat, quia ∞: FM = FM: o. Igitur puncta F, D congruere debent. Determinabitur tamen facile vertex parabolæ, ex M demissa perpendiculari MP ad FN productam, & subtangente PT bifariam secta in S.

Coroll. IV. Generatim igitur sequitur, quod si F (fig. 7 & 8) jaceat infra D, sectio sit ellipsis; si congruat cum D (fig. 10), sit parabola; si F sit supra D (fig. 9), sectio fiat hyperbola. Nam in primo casu erit MFN < MDN, consequenter FN cum M*f* concurrere debet ex parte N, seu ex eadem respectu tangentis MQ. In secundo nuspiam concurret. In tertio (fig. 9) est MFN > MDN, ideoque concurret NF cum M*f* ex parte F, seu ex altera tangentis MQ parte. Ergo in primo casu foci sunt ex eadem tangentis parte,

 quod

quod ſit in ellipſi; in ſecundo alter diſtat infinite, quod competit parabolæ; in tertio ſunt ad diverſas tangentis partes, quod ſolummodo in hyperbola locum habet.

Lemma IV. *Si corpus vi centrali deſcribat curvam quamlibet circa* S (fig. 11), *areæ, quas radius vector verrit, ſunt ut tempora.*

Fig: 11. Demonſtr. Sit directio projectionis MP, vis centralis ut MG, deſcribetur motu compoſito MN; & ſi nulla vi verſus S urgeretur corpus, ubi ad N pervenit, pergeret moveri æquali tempore per Nn $=$ MN, quo deſcripſit MN; ſed quia ponitur vis centralis in N $=$ NQ, movebitur eodem tempore per NO, & ſic deinceps. Sunt autem ob MN $=$ Nn, triangula MNS, Nn S æqualia; & ob QN parallelam ad On, eſt NSO $=$ NnS; ergo etiam MSN $=$ NSO. Id quoniam verum eſt de quibuſvis areolis triangularibus, quas æqualibus tempuſculis radius vector verrit, etiam verum erit de ſumma quavis; imminutis autem tempuſculis in infinitum baſes MN, NO degenerant in arcus, & areæ triangulorum in ſectores; igitur areæ, quas radius vector verrit, ſunt ut tempora.

THEOREMA IV.

Si corpus deſcribat curvam quamlibet SMR (fig. 7), *quam oſculatur circulus* AMO *in* M, *centro virium in* F *extra centrum circuli conſtituto, erit vis centralis ut* $\frac{1}{FT^2 \times MV}$.

Demonſt. Dum corpus percurrit tempuſculo infinite parvo arcum MR, vi centrali deflectit a tangente MP ſpatio PR $=$ MG, quod, eodem tempuſculo manente vi ad M conſtante, motu uniformiter accelerato deſcriberetur, ſi abeſſet vis impreſſa per tangentem MP; eſt autem ex notis mechanicæ formulis vis in M, quæ dicatur v, ut ſpatium directe, & ut quadratum temporis reciproce, conſequenter $v = \frac{MG}{tt}$. Porro per Lemma IV, t, ſive tempus, eſt ut area FMR quæ cum non differat a triangulo rectilineo, cujus baſis eſt MR (ſubtenſa arcus cognominis). & altitudo FT, congruente ſcilicet MR cum tangente MP, eſt $=$

MR×FT

$\frac{MR \times FT}{2}$, consequenter $v = \frac{MG}{MR^2 \times FT^2}$ (sumpta dupla area loco simplæ, quod ratio maneat eadem). Jam vero est $ME : MR = MR : MO$, ideoque $MO \times ME = MR^2$; & $ME : MG = MV : MO$, ac proinde $ME \times MO = MG \times MV = MR^2$. Unde hoc valore pro MR^2 substituto, fit $v = \frac{MG}{MG \times MV \times FT^2} = \frac{1}{FT^2 \times MV}$.

Coroll. I. Quoniam $FM : FT = MO : MV$, est $MV = \frac{FT \times MO}{FM}$: igitur etiam $v = \frac{FM}{FT^3 \times MO}$.

Coroll. II. In sectionibus conicis est $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$, & $MO = \frac{2MN^3}{MB^2}$; hinc $v = \frac{FM \times MB^2}{FT^3 \times 2MN^3}$. Dein est $MN : MB = FM : FT$; quare $FT^3 = \frac{MB^3 \times FM^3}{MN^3}$, quo valore adhibito obtinetur $v = \frac{FM \times MB^2 \times MN^3}{2MN^3 \times MB^3 \times FM^3} = \frac{1}{2MB \times FM^2}$ seu omissa constante $2\,MB$, in sectionibus conicis vis centralis est in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium in foco constituto.

Coroll. III. Si (fig. 5) poneretur in f centrum virium repulsivarum, & corpus projiceretur directione MW, spatium motu uniformiter accelerato descriptum eo tempusculo, quo motu uniformi percurreretur MW, foret $Wp = Mg = MJ$ (ob Jp ad fH parallelam, & triangula fMH, JMg similia, nec non $Mf = MH$ per Lem. I); & quia triangulum FMt simile triangulo fMz, manifestum est, facta linearum analogarum substitutione, vim rerepulsivam, qua describatur circa focum F hyperbola, obtineri $= \frac{fM}{fz^3 \times MO} = \frac{1}{fM^2 \times 2MB}$.

Scholium.

Propositio conversa prioris corollarii, quod si vires centrales agant in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro virium, corpus

corpus describet sectionem conicam: hunc in modum ostendi potest: si ponatur $\frac{FM}{FT^3 \times MO} = \frac{1}{FM^2}$ (per Corol. I) seu in fig. 12. $\frac{FM}{FT^3 \times MA} = \frac{1}{FM^2}$, erit $FM^3 = FT^3 \times MA$. Unde $FM^3 : FT^3 = MA : 1$; seu quia triangula FTM, MVA similia, si ad MA, MV fiant MP, MO continuæ proportionales, $FM^3 : FT^3 = MA^3 : MV^3 = MA : MO = MA : 1$; igitur $MO = 1$, sive constans. Jam vero si harum linearum accipiantur dimidiæ MC, MB, cum sit MB semiparameter axis sectionis conicæ, ob MC, ML, MN, MB continuo proportionales (coroll. lem. II), erit $MO = 2MB$ parameter. Igitur cum in sectionibus conicis semper sit MA ad constantem MO, ut FM^3 ad FT^3, & in curva per vires hac lege agentes describenda, eadem ratio semper obtinere debeat, evidens est, omnia puncta curvæ esse ejusmodi, per quæ sectio eadem conica transire possit, hoc est, describi sectionem conicam, cujus tamen species pendet a celeritate projectionis, uti mox videbimus.

Fig: 12

THEOREMA V.

Chorda circuli osculantis sectionem conicam, quæ transit per focum, in quo est centrum virium agentium in ratione reciproca duplicata distantiarum, est quadrupla altitudinis, per quam cadere debet corpus gravitate constante, quam habet in ea distantia, ut acquirat celeritatem, quacum projiciendum est directione data, ut datam sectionem conicam describat.

Dem. Osculetur (fig. 7) circulus MBA sectionem conicam in M; sit centrum virium in F, per quod transeat chorda MV, directio projectionis sit MP. Supponamus, corpus in M habere celeritatem, quam cadendo per MD acquireret: hac celeritate eodem tempore, quo percurrit motu uniformiter accelerato MD, describet motu uniformi ejus duplum ML. Pariter dum corpus eadem celeritate projectum percurreret MP motu æquabili, describeret motu uniformiter accelerato PR. Sunt autem spatia vi gravitatis agente motu uniformiter accelerato percursa inter se, ut quadrata temporum (per Theor. III); & hæc sunt ut quadrata spatiorum, quæ

Fig: 7.

eodem

eodem tempore celeritate lapsu acquisita, & uniformi percurrerentur, cum spatia sint ut tempora celeritate existente eadem (per cor. III Theor. I) igitur est $PR : MD = MP^2 : ML^2$, & ducta prima ratione in PA, ad MV parallelam, $PR \times PA : MD \times PA = MP^2 : ML^2$. Est autem ex nota circuli proprietate $PR \times PA = MP^2$; ergo etiam $MD \times PA = ML^2$; hinc $PA : ML = ML : MD$. Jam vero si PA infinite accedat ad V, M sive si puncta M, R congruant, est $PA = MV$; unde $MV : ML = ML : MD$. Sumpsimus autem $ML = 2MD$, ergo $MV = 2ML$, consequenter $MD = \frac{1}{4} MV$.

Coroll. I. Quoniam (per corollaria Lem. III) si D est supra F, sectio, quam circulus datus osculatur, est ellipsis; Si congruit cum F, parabola; si est infra F, hyperbola; patet, ut describatur ellipsis, celeritatem projectionis debere esse minorem, quam quæ cadendo ex M usque in F acquireretur; ut describatur parabola, requiri celeritatem, quæ eo lapsu acquireretur; & ut describatur hyperbola, corpus debere majore celeritate projici, quam quæ produceretur a gravitate constante in M tempore lapsus per FM.

Coroll. II. Si supponamus, centrum virium F (fig. 13) infinite distare, habebitur parabola, ut in hypothesi projectionis gravium Galileana. Nam tunc FN fit ad VM parallela. Porro in analogia superius (coroll. Lem. III) demonstrata $DF : FM = FM : FE$, fiet $FM - FD$ (seu DM): $FE - FM$ (vel ME) $= DF : FM$. Atqui FD & FM fiunt æquales, cum utraque sit infinita; ergo $DM = ME$. Vnde ex E ducto perpendiculo EQ, & sumpta $Qf = QE$ habetur focus f; inde ducta ordinata MP, subtangens PT, & vertex S, eritque EM quarta pars parametri pertinentis ad diametrum MV. Fig: 13.

Coroll. III. Si M (fig. 7, 8, 9, 10 & 13) sit vertex principalis sectionis, diameter circuli osculatoris transit per centrum virium, & chorda MV congruit cum eadem; unde etiam puncta L, N, C coincidunt. Nam alias notum est, normalem in vertice esse æqualem semiparametro, adeoque formula radii curvaturæ $\frac{MN^3}{MB^2}$, quam superius adduximus, abit in hanc $\frac{MB^3}{MB^2} = MB$, sive semiparametro. In hac itaque hypothesi est mQ normalis ad MF. (vid. fig. 14)

Fig: 14. fig. 14) SI jam MD < DF, in analogia FD: FM = FM: FE, erit FM < 2FD, consequenter etiam FE < 2 FM. Unde demissa FM ad MQ in M normali, & producta in f, ut sit Mf = ME, cadet f intra M & F. In hoc ergo casu est M apsis summa ellipseos, quae describitur. Et quia dividendo sit FE — FM (vel ME): FM = FM — FD (seu DM): FD, ideoque ME: MD = FM: FD, etiam erit EM > MD; hinc f cadet intra D & F.

Fig: 15. Coroll. IV. Si (fig. 15) MD > FD, erit FM > 2FD, & FE > 2MF. Unde punctum f cadet ultra F respectu M, eritque M apsis ima ellipseos, quae describitur.

Coroll. V. Si (fig. 16) MD = FD, erit FM = 2FD, & FE = 2FM, incidetque f in F, hoc est, describetur circulus. Ex quo liquet, theorema Hugenianum esse casum particularem superius allati, dum nempe demonstrat, celeritatem in circulo esse aequalem illi, quae acquireretur cadendo per $\frac{1}{4}$ diametri.

Fig: 17. Coroll. VI. Si (fig. 17) MD > MF, & sumatur FE ad eandem partem cum D, erit EM semper majus, quam FM. Quare f semper cadit ultra tangentem, & sectio erit hyperbola.

Fig: 18. Coroll. VII. Si (fig. 18) MD = MF, sive FD = o, fiet ME = ∞, & sectio describenda erit parabola.

Coroll. VIII. Si (fig. 9 & 17) MD = ∞, hoc est, si corpus celeritate infinita projiceretur, hyperbola mutaretur in rectam MQ: nam FD fieret = ∞, hinc analogia FD: FM = FM: FE mutaretur in hanc ∞: FM = FM: o; evanescente autem axe transverso hyperbola fit infinite lata, sive abit in rectam. manifestum igitur est, fieri non posse, ut corpus grave oblique projectum describat lineam rectam.

Fig: 19. Coroll. IX. Si (fig. 19) MQ (directio projectionis) jaceat in directum cum MF, & corpus projiciatur celeritate cadendo per MD acquisita; imprimis MC & LC fiunt parallelae, seu radius curvaturae fit infinitus. Deinde LN incidit in M, seu normalis evanescit. Hinc tandem curva mutatur in rectam per centrum virium transeuntem.

Coroll. X. Si in omnibus figuris citatis fiat MD = o, analogia FD: FM = FM: FE habet omnes tres terminos aequales; unde ME = o, & f congruit cum M. Quare si corpus projiciatur celeritate infinite parva, percurret rectam (seu ellipsin infinite arte arctam) per centrum virium transeuntem. Hinc quoque est quod gravia libere cadentia rectam describant.

Coroll. XI. Hinc deducitur etiam, celeritatem corporis sectionem conicam describentis centro virium in foco posito, esse in quovis trajectoriæ puncto in ratione directa subduplicata parametri principalis, & reciproca simplice perpendiculi e centro virium ad tangentem demissi. Sic si celeritas dicatur $= c$, vis acceleratrix $= v$, spatium $= s$, constat e formulis mechanicis esse $c = 2\sqrt{sv}$.

Est autem per hypothesin [fig. 7] $v = \frac{1}{FM^2}$; $s = \frac{1}{4}MV$, consequenter $c = \frac{2\times 1}{FM} \times \frac{1}{2}\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{MV}}{FM}$. Jam vero est $BM : MN = MN : ML = \frac{MN^2}{BM}$, & $2LM = MV = \frac{2MN^2}{BM}$; & ob triangula FTM, BMN similia, habetur $FT : FM = BM : MN = \frac{FM \times BM}{FT}$, consequenter $\frac{2MN^2}{BM} = \frac{2FM^2 \times BM^2}{FT^2 \times BM} = \frac{2FM^2 \times BM}{FT^2}$, & $\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{2MN^2}}{\sqrt{BM}} = \frac{FM \times \sqrt{2BM}}{FT}$ quo valore substituto in $\frac{\sqrt{MV}}{FM}$, obtinetur $\frac{FM \times \sqrt{2BM}}{FT \times FM} = \frac{\sqrt{2BM}}{FT}$. Est autem BM (per Lem II.) semiparamater axis principalis, igitur &c.

Coroll. XII. Quia $FD : FM = FM : FE$ (fig. 8 & 9) erit $FE : FE \pm FM$ (seu Mf) $= FM : FM \pm FD$ (vel MD). Est autem utrobique DM spatium, per quod cadendo gravitate constante in M acquiritur celeritas projectionis; unde hoc spatium $= \frac{MF \times Mf}{FE}$; quod si jam in formula superius allata $c = 2\sqrt{sv}$ substituatur pro s, ponaturque $v = \frac{1}{FM \times FM}$, obtinebitur $c = \frac{2\sqrt{MF \times Mf}}{MF \times \sqrt{FE}} = \frac{2\sqrt{Mf}}{\sqrt{MF \times FE}}$, seu omissa constante 2, $c = \frac{\sqrt{Mf}}{\sqrt{MF \times FE}}$.

In parabola, si centrum virium sit in foco infinite distante, est (fig. 13) $MD = ME = Mf$, & vis constans, unde formula mutatur in hanc $c = \sqrt{Mf}$, omissa constante 2. At vero si (fig. 10) F centrum virium habeat a loco projectionis distantiam finitam, obtinetur $c = \frac{1}{\sqrt{FM}}$. Hoc est: *in ellipsi & hyperbola est celeritas in quovis puncto in ratione subduplicata directa distantiae a foco, qui non est centrum virium [seu superiore], & reciproca composita ex subduplicata distantiae a centro virium, & subduplicata item axis primi; in parabola vero, si centrum virium sit in foco infinite distante, in ratione subduplicata directa distantiae a foco altero; & si centrum virium sit in foco finite distante, in ratione subduplicata reciproca distantiae a centro.*

Fig. 4. Coroll. XIII. Ex coroll. XI. sequitur, quod si corpus describat ellipsin sMS (fig. 4) cujus parameter principalis sit $2MB$, ejus celeritas in s (apside ima) sit ad celeritatem in S (apside summa), ut est $\frac{\sqrt{2BM}}{Fs}$ ad $\frac{\sqrt{2BM}}{FS}$, sive ut $FS\sqrt{2BM}$ ad $Fs\sqrt{2BM}$. Quod si corpus circa F deberet describere circulum radii Fs, ejus celeritas deberet esse ut $\frac{\sqrt{2Fs}}{Fs}$; & si describendus esset circulus radii FS, requireretur celeritas ut $\frac{\sqrt{2FS}}{FS}$: igitur celeritas corporis describentis circulum radii Fs, est ad celeritatem corporis describentis circulum radii FS ut $FS\sqrt{2Fs}$ ad $Fs\sqrt{2FS}$. Manifestum autem est, esse $Fs < BM$, & $FS > BM$; quare $FS\sqrt{2BM} > FS\sqrt{2Fs}$; & $Fs\sqrt{2BM} < Fs\sqrt{2FS}$; jam vero $FS\sqrt{2BM}$ est celeritas in apside ima ellipseos, $Fs\sqrt{2BM}$ in apside summa; unde corpus in ellipsi cum ad apsidem imam pervenit, habet majorem celeritatem, quam ut ea possit describi circulus, cujus radius sit distantia illius apsidis a centro virium; at cum in apside summa versatur, ejus celeritas minor est, quam quae requiritur ad describendum circulum radii aequalis distantiae apsidis summae a centro virium.

Coroll.

Coroll. XIV. illud etiam e dictis colligitur, corporum circulos concentricos describentium velocitates esse in ratione reciproca subduplicata radiorum. Etenim si radii sint FS, Fs, celeritates sunt ut F$s\sqrt{2FS}$ ad FS$\sqrt{2Fs}$, hinc divisione per $\sqrt{2FS \times Fs}$ facta, ut $\sqrt{Fs}$ ad $\sqrt{FS}$.

Coroll. XV. Si ponamus tempore T, quo corpus A percurrit suam ellipsin, corpus C describere circulum, cujus radius $=$ R; & tempore t, quo corpus B absolvit suam ellipsin, corpus D peragrare circulum radii $= r$, cum circuli describantur motu uniformi, & spatia sint peripheriæ (quæ dicantur $=$ P, & $= p$) tempora vero ut spatia divisa per celeritates, erit $T : t = \frac{P}{\sqrt{r}} : \frac{p}{\sqrt{R}}$ (coroll. XIV.) est autem $P : p = R : r$, hinc etiam $T : t = \frac{R}{\sqrt{r}} : \frac{r}{\sqrt{R}} = R\sqrt{R} : r\sqrt{r}$, & $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$. Jam vero T & t sunt tempora periodica in ellipsibus corporum A & B; R & r vero (radii circulorum qui a corporibus C & D iisdem temporibus percurrerentur) sunt distantiæ corporum A & B a centro virium, dum habent celeritatem mediam; igitur *temporum periodicorum quadrata sunt ut cubi distantiarum, in quibus corpora celeritatem mediam habent.*

Scholium I. Attendenti patebit (fig 9.) locum geometricum omnium focorum f sectionum conicarum, quæ quavis projectionis celeritate directione data QM circa focum datum F describi possunt, esse rectam infinitam fMw, ita ut pars indefinita Mw sit pro focis ellipseon, quæ, w in infinitum recedente ab M, mutantur in parabolam, & w accedente in infinitum ad M, coarctantur in rectam FM. At pars Mf valet pro hyperbolis, ita, ut circa focum F descriptæ semper rectam QM in M tangant, quoties Mf > MF; dum autem FM $= f$M, hyperbola utraque mutetur in rectam QM; denique dum FM > fM, eæ contingant rectam QM, quæ focum f habent. Fieri itaque nequit, ut viribus attractivis in F tendentibus hyperbola circa focum f describatur, quia cum semper sit EM > FM, & EM $= f$M, etiam semper est fM > FM. Verum si concipiatur vis repulsiva a puncto F agens in ratione reciproca duplicata distantiarum, tunc equidem describentur eæ hyperbolæ, qua- Fig. 9.

læ, quarum focorum f locus geometricus est Mf ex altera tangentis QM parte, ab M, usque dum Mf fiat æqualis cum MF (per Coroll. III. Theor. IV); sic (fig. 20) posito, quod corpus M ab F in dicta ratione repellatur, sumenda erit MD ultra QM, per quam si vi repulsiva constante in M recederet, acquireret eam velocitatem, qua ex M projicitur. Fiat FD: FM = FM: FE & demisso perpendiculo EQ ad QM, sumptaque parte EQ = Qf habebitur focus hyperbolæ AMO, quæ describitur circa f. Etenim cum MD = $\frac{1}{4}$ chordæ circuli osculantis curvam, & quæ transit per centrum vis repulsivæ F, jaceat ultra QM, totus circulus erit ultra QM. Unde si (ut superius) facta DL = MD, demittatur ad CM perpendicularis LN (est vero CM ad QM perpendicularis) erit MN normalis hyperbolæ. Ex analogia porro FD: FM = FM: FE, fiet dividendo FD — FM (seu DM): FM — FE (vel ME) = FD: FM; & ob rectum ad N est ND = DM, ob rectos vero ad Q., est fM = ME; erit igitur etiam ND: fM = FD: FM, ac Ff producta per N transire debet.

Fig: 20.

Scholium II. Illud quoque per se manifestum est, triplicem posse fingi hypothesin, in qua hyperbola vi repulsiva describenda mutetur in rectam: primo si celeritas projectionis ponatur = ∞, consequenter etiam MD = ∞, & tunc evanescit EF axis transversus. 2do si fingatur celeritas projectionis, sive MD = 0, & fit hoc casu FM = fF = EF, hoc est, distantia foci a vertice evanescit, hyperbola infinite arctata. 3tio si ponatur MQ in directum jacere cum FM. Denique etiam colligitur, F abeunte ad distantiam infinitam, seu vi repulsiva agente directionibus parallelis, hyperbolam circa focum f descriptam abire in parabolam, cujus determinatio eadem, ac quam dedimus pro coroll. II. (fig. 13 & 18) nisi quod F summendum sit ex parte E, & schema invertatur.

Postquam ostendimus, tum quæ ratio virium centralium, tum quæ celeritas projectione impressa pro data quavis sectione conica describenda requiratur, ac simul modum exhibuimus determinandi spatium, per quod vel gravitate, vel vi repulsiva corpus moveri deberet, ut velocitatem illam acquireret, superest, ut ad sectiones conicas universim transferamus ea problemata, quæ de motu corporum terrestrium oblique projectorum proponi solent.

§ III.

§ III.
PROBLEMA I.

Si corpus data vi e puncto quovis dato projectum describat sectionem conicam, invenire limites, ad quos singuli jactus quavis directione facti pertingant, & qui [limites] comprehendant omnia puncta, quae, velocitate projectionis manente eadem, feriri possunt.

RESOLUTIO.

I. Pro ellipsi. Sit locus, e quo corpus projicitur (fig. 21.) M, Fig: 21.
centrum virium F, altitudo, per quam gravitate constante in M cadendo acquiritur velocitas projectionis, MD, minor, quam MF. Inveniatur axis ellipseos, quae hac celeritate describi potest, ex analogia FD: FM = FM: FE (coroll. I. Lem. III) focis F, M, axe majore FE + MF = eE describatur ellipsis EP pe, cujus rotatione circa E e determinabuntur quaesiti limites.

Demonst. Radio ME, centro M, descripto circulo E f L sumatur quaevis directio MQ; perpendiculum productum EQ, si fiat Qf = EQ, necessario cadet in peripheriam circuli, ob rectum ad Q, consequenter ME = Mf; ducta per F, f recta Ss = FE, erit axis ellipseos describendae focis F, f; & si ducatur ex M per f recta MP, occurrens ellipsi EPe in P, erit P punctum contactus. Nam cum Fe = ME, erit MP + PF = eE, consequenter ablatis aequalibus Mf & Fe, manet fP + FP = FE. Est ergo P in ellipsi minore MsPS. Ducatur tangens TP ellipseos EPe; erit eadem tangens minoris sPS, cum maneant anguli MPn = MPN = nPF = NPF, & NP, nP normales ad P congruant.

Nullum porro punctum aliud ellipseos EPe esse commune ellipsi sPS, adeoque illam ab hac non secari, sic ostenditur ex absurdo. Sit praeter P aliud quodvis punctum p utrique ellipsi commune, si fieri potest. Ductis Mp, Fp patet, si p pertineat ad utramque ellipsin, esse Pf + FP = pf + pF, & addita Mf ad utrumque, fieri MP + PF = Mf + fp + pF; atqui MP + PF = Mp + pF, consequenter Mf + fp + pF = Mp + pF & ablata communi pF, manebit Mf + fp = Mp, quod est absurdum.

Hujus problematis solutionem pro parabola insinuat R. P. Boscovich in supplem. ad L. 2 Stay. N. 492. & persecutus est in

Dissert,

Differt. de motu gravium, quam videre mihi non contigit. Methodo tangentium Cartesiana (quæ in supposita æqualitate duarum radicum æquationis fundatur) usus est pro eadem curva cel. Jac. Bernoullius (oper. Tom 2. Not. & Animad. in Geom Cart. Not. VII) quæ, ut advertit, pro aliis quoque lineis positione datis sufficit. At præsentis simplicitas, facilitasque præplacuit, præcipue cum sectionum conicarum intimam connexionem clarissime demonstret.

Coroll. I. ex iis, quæ superius (coroll. I. Lem. III) dicta sunt, sequitur, locum geometricum focorum *f* omnium ellipseon, quæ data hac celeritate corpore ex M projecto circa focum F describi possunt, esse circuli E*f*L peripheriam, quod nempe ME semper sit æqualis cum M*f*.

Coroll. II. Si assumatur focus *f*, facile determinari directionem MQ, arcu scilicet *f*E bissecto.

Coroll. III. Si consideremus focum *f* mobilem, & primo quidem in E, patet ellipsin degenerare in rectam FE: cum enim arcus E*f* = o directio MQ congruet cum ME, consequenter corpus ex M celeritate hac data projectum ascendet in E, tum ex E descendet per M in F. Si 2do focus *f* ab E digrediatur, ellipses semper magis dilatabuntur, usque in L; & tunc habebitur ellipsis latissima, in qua est minima focorum distantia LF, & directio ad axem *e*M = FE perpendicularis, punctum vero contactus est in communi utriusque vertice *e*. Inde si ulterius 3tio progrediatur focus *f* per alteram semiperipheriam, rursus ellipses contrahi incipient, donec *f* rursus ad E appellente degenerent in infinite arctam.

II. Pro parabola. Quoniam parabola nil aliud est, quam ellipsis, cujus foci infinite a se distant, supponamus focum F figuræ vigesimæ Imæ abire a puncto M ad distantiam infinitam, & quia ponitur vis agere in ratione reciproca duplicata distantiarum, distantiæ vero omnes ratione infiniti æquales evadunt, habebitur gravitas constans, cujus directiones fient parallelæ. Sit itaque (fig. 22.) M locus projectionis, MD altitudo, per quam cadendo gravitate constante in M acquiritur celeritas projectionis; abibit imprimis ellipsis figuræ vigesimæ Imæ EP*e* in hac figura in parabolam DPR, foco in M, vertice principali in D. Dein dico, DPR circa axem DM rotata definiri spatium, ad quod omnes parabolæ, velut MSE, hac celeritate descriptæ pertingere possunt, & quæ superficiem paraboloidis in P tangunt, ubi recta ex M per earum focos *f* ducta eidem occurrit.

Fig: 22.

De-

Demonst. Ex Coroll. I, Lem. III clarum est, locum focorum f omnium parabolarum, de quibus quæstio est, esse circumferentiam circuli Dfl, radio MD, centro M descripti. Sumpta DB = DM, & ex B & D erectis normalibus ad MB patet, BK esse directricem parabolæ DPR; Dk parabolarum omnium, quarum foci sunt in peripheria Dfl. Est itaque MP = PG & fP = Pg; TP communis parabolarum MSQ, DPR tangens in puncto communi P. Quod si aliud p dicatur commune, ducantur ad illud Mp, fp, & ex p ad BK perpendicularis pK. Erit per hypothesin, quod p sit utrique parabolæ commune, fp = pk; & quia ob DB = MB, etiam kK = MD = Mf, additis æqualibus habebitur $Mf + fp = pk + k$K = pK; atqui pK = Mp; igitur etiam Mp = Mf + fp, quod absurdum. Nequit ergo p esse commune parabolis.

Coroll. I. Si lubeat motum foci f considerare, manifestum est, dum f est in D, describi a corpore projecto perpendiculum MD. Nam directio pro parabola MSQ obtinetur prorsus ut pro ellipsi arcu Df per MQ bissecto: unde evanescente Df, MQ cum MD congruit.

Coroll. II. Ex D digrediente f, parabolæ fiunt latiores, donec f veniat ad MD productam; & tum directio erit Ml, parabolæ vertex in M, focus tantundem infra M, quantum est D supra idem M, hoc est, describetur parabola æqualis cum DPR, quam proinde ad distantiam infinitam contingere censenda est, tanquam in vertice altero ellipseos infinitæ, uti in fig. 21 ellipsis, cujus focus est in L, tangit ellipsin majorem in vertice e.

Coroll. III. Quando f ex altera parte rursus versus D ascendit, iterum contrahuntur (seu potius minuuntur) parabolæ, uti in descensu ex D per f creverant, donec in D desinant in priorem rectam DM (coroll. I).

III. Pro hyperbola. Cum hyperbola tam viribus attractivis, quam repulsivis describi possit, pro utraque hypothesi videndum, num, & qui dentur limites. Ponamus, vim centralem esse attractivam versus punctum fixum F (fig. 28), locum projectionis esse M, celeritatem acquisitam cadendo per MD; fiat DF. FM = FM: FE, & describatur centro M, radio FM circulus; tum eodem centro construatur circulus major, radio ME; erit peripheria posterioris locus omnium focorum f hyperbolarum, quæ hac projectionis celeritate Fig: 28.

leritate

leritate describi possunt: uti si sumatur f, & conjungatur cum F, erit $fM = FM = FE =$ axi transverso Ss hyperbolarum CSM, csm; atque si complementum arcus ef ad duos rectos, nempe arcus fE, secetur bifariam in Q, habebitur directio MQ, qua corpus projici debet, ut describatur hyperbola CSM.

Quodsi f in e sumatur, directio fiet ad FM perpendicularis. At si f cadat in E, vertex hyperbolae describendae incidet in F, ob EM — FM = FE; & quia complementum ad duos rectos arcus e QE = o, directio cum Me congruit. Quare in hoc casu hyperbola in rectam Fe abit.

Focis itaque f circulum efE peragrantibus manifestum est, nullos dari limites, ultra quos jactus exire nequeat, cum hyperbolarum situs per omnes inclinationes possibiles vagetur. Unde in hac hypothesi spatium, ad quod jactus pertingere possunt, finitum non est, ut in ellipsi; nec una ex parte in infinitum excurrens, ex altera terminatum, ut in parabola; sed ubivis apertum, nuspiam clausum, quod ipsum & magis patebit in sequente problemate, ubi hanc hypothesin resumemus.

Ut igitur superioribus analoga quaedam resolutio locum habeat, necesse est, ut supposita vi attractiva, fingatur centrum virium mobile, velut in fig. 23, in qua ponatur M locus prjectionis, centrum virium F mobile in circulo, cujus determinationem jam dabo. Sit MD spatium, per quod si gravitate constante in M cadat corpus, acquirat celeritatem projectionis in MQ. Fiat, ut alias, DF: FM = FM: FE, & facto perpendiculo EQ ad MQ aequali cum Qf, habetur alter focus f immobilis, directione MQ bissecante arcum eF circuli centro M, radio MF descripti. Transferatur ex f versus M pars $f\epsilon = Me = MF$; focis M & f, axe transverso $e\,\epsilon$ descripta hyperbola e P p R, & circa axem suum acta, definiet spatium, ad quod jactus pertingere possunt, & hyperboloides inde genitum tangetur ab hyperbolis in P, ubi recta MF producta eidem occurrit, quamdiu MF cum asymptoto hyperbolae e PR non sit parallela, quo casu punctum contactus censetur ad distantiam infinitam. Ubi angulus ab MF cum Mf comprehensus major fuerit, hyperboloides non tangetur ab hyperbola circa focum F descripta; sed ab altera opposita circa focum f tangetur alterum hyperboloides pariter oppositum priori, cujus vertex est ϵ in puncto, ubi illi MF in partem oppositam producta occurrit. Haec

Hæc omnia locum habent, si supponatur centrum virium immotum in f, & hyperbolas circa focos mobiles F describi viribus repulsivis ab f, quæ hypothesis etiam longe concinnior videtur.

Demonst. Ducantur fP, fF; patet, esse $fM - FM = ef = FE$, seu axi transverso hyperbolæ, quæ hac celeritate projectionis describi potest, ideoque M ad hyperbolam circa F descriptam pertinet, quæ necessario ab MQ in M tangitur, ob $fMQ = QMF$. Deinde est $fP - MP = e\varrho$ ex constructione, ideoque $Pf - FP = e\varrho + MF = e\varrho + \varrho f = ef$; ergo P etiam ad hyperbolam MSQ pertinet, quæ nullum aliud punctum cum illa priore commune habet. Si neges, sit ejusmodi p. Ductis Fp, Mp, fp, evidens est, fore $fp - Fp = ef$; itaque $fp - Fp - MF = ef - \varrho f = e\varrho$. Sed etiam $fp - Mp = e\varrho$; quare necesse est, ut sit $MF + Fp = Mp$, quod est absurdum.

Sed sumatur (fig. 26) focus w ita, ut fMw sit angulus major, quam fCN, ab asymptoto CN hyperbolæ e CPL cum fM comprehensus. Producatur w M in oppositum, ut hyperbolæ oppositæ ϱpl occurrat in p, & conjungatur p cum f. Dico hyperbolam ϱpl tangi in p, ab hyperbola ϱpt circa f descripta, & opposita illi, cujus focus est w. Etenim $Mp - fp = e\varrho$; igitur $wM + Mp - fp = e\varrho + wM = e\varrho + \varrho f = ef$. Quare est p utrique hyperbolæ commune. Esse porro nullum aliud punctum commune, eodem modo ostenditur, quo prius id de hyperbola MSN (fig. 23) demonstratum est. Fig: 26.

Scholium I. Necesse non est, ut mutationes hyperbolarum consideremus, quæ motum focorum F consequuntur, cum hanc rem quivis ad eum modum persequi possit, quem superius de ellipsi adhibuimus.

Scholium II. Superest circulus, qui ad sectiones conicas adhuc pertinet. Verum si (fig. 27) locus projectionis constans in M esse debeat, cum etiam directio debeat esse normalis ad diametrum per centrum F transeuntem, facile apparet, omnia hic esse determinata, nec nisi unicum circulum describi posse. Ut igitur alicui mutationi locus sit, supponi poterit centrum F mobile in circulo radio MF, centro M, descripto, & tunc spatium definietur circulo FLe, radio duplo ME = 2MF, & eodem centro M descripto. Nam tangi hunc ab omnibus, adeo manifestum est, ut per se cuivis incurrat in oculos. Quare de his nil ultra addo. Fig: 27.

PROBLEMA II.

Fig: 24, 25, 26, 27, 28, *Dato quovis puncto* R (fig. 24, 25, 26, 27, & 28) *intra limites priore problemate definitos, reperire projectionis directionem, ut corpus circa focum datum sectionem conicam per illud transeuntem describat.*

RESOLUTIO.

I. Pro Ellipsi. Sint in fig. 24 omnia determinata, ut in vigesima
ima, & detur intra ellipsin EPp limites definientem punctum quod-
libet R. Centro F, radio FE describatur circulus EAB, cui in A
occurrat FR producta. Tum centro R, radio RA describatur alter
arcus Afw, qui puncto R existente intra limites, secabit in duobus
locis circulum EfL, velut in f & w; puncto vero R sumpto in ipso
limite, eundem tanget, ob RA + RF = FE = fR + RF; non attin-
get, R posito extra limites, quando problema fit impossibile. Erunt
f & w foci duarum ellipseon per R transeuntium, quarum directio-
nes habentur, arcubus Ef, Ew per MQ, Mq bissectis.

Demonst. Imprimis evidens est, esse ob fR (vel wR) + RF =
FR + RA = FA, summam e focis f (vel w) & F ad R ductarum
æqualem axi ellipseos, quæ hac celeritate describi potest, adeoque
R esse in ellipsi MRS, vel MRT. Dein easdem tangi a QM in M pa-
tet, quod angulus EMQ = QMf, & EMq = qMw.

Sit R in perimetro ellipseos EPp, erit MR + RF = FE + Fe;
ideoque ablatis utrinque æqualibus Mf, Fe, manebit fR + RF =
FA = FE, & fR = RA, & hinc summa MR + RF excedit fR +
RF, seu FA, radio Mf, consequenter circulus radio RA, centro R
descriptus tanget alterum EfL in f, & unicus jactus erit possibilis,
quo describatur ellipsis per R transiens.

Denique si R sit extra ellipsin EPp, est MR + RF > eE, & con-
sequenter ablatis æqualibus Mf, Fe, & communi FR, manet fR
> RA, & propterea circulus radio RA descriptus non pertingit ad
alterum, nec ellipsis per R transiens hac celeritate describi potest.

II. Pro Parabola. Foco F ad distantiam infinitam abeunte, cæte-
ris ut in ellipsi manentibus, circulus radio FE descriptus e foco F
tanquam centro, abit in rectam DA (fig. 25); foci autem f & w in
circulo Dfw eodem modo determinantur, descripto circulo radio
RA, centro R, siquidem sit intra DPL; si ponatur in perimetro DPL,
hi circuli se tangent in unico puncto, & unicus jactus erit possibilis;
si sit-

si sit extra, nullus. Tandem directiones jactuum habentur, arcubus Df, $D\omega$ per MQ, Mq bissectis.

Demonstratio expedita est, nam, ut e prioribus constat, ob $fR = RA$, & $fM = MD$, est tam M, quam R in parabola MSR circa focum f descripta, quam tangit MQ in M, cum sit angulus QMD = QMf. Eodem modo ostenditur, parabolam MsR transire per R & habere focum ω, tangique ab Mq in M.

Si R sit in perimetro DPL, est $AR = Rf$; & ob $MR = RG$, evidens est, $fR + RA$ excedi ab $MR + RA$ radio Mf, ideoque circulos se in f tangere, & unicum posse fieri jactum. Posito R extra DPL, fiet $RA < Rf$, & jactus impossibilis.

III Pro hyperbola. Ponatur 1mo centrum virium attractivarum fixum in F (fig. 28), & detur R ubicunque situm; poterunt in omni casu duae hyperbolae circa F describi, quae transeant per R, nisi, dum R cadit in recta Ee in F, vel supra F. Nam descripto circa F circulo EA radio FE, ducatur usque ad A per F recta RA; tum centro R, radio RA, describatur circulus, alterum $EU\,ef$ in ω & U secans; erunt ω & U foci, directiones vero MK, Mk, quae arcus ωE, UE bisecant, pro duabus hyperbolis per R transeuntibus. Est quippe $\omega R - FR = AR - FR = FA = FE$; item $fM - FM = FE$. Eodem modo liquet, esse $UR - FR = AR - FR = AF = FE$. Quare puncta M & R sunt in utraque hyperbola, quarum altera ab MK, altera ab Mk in M tangitur. Fig: 28.

Verum si R existat in F vel supra F, in recta Ee utcunque etiam producta, circulus radio RA descriptus, congruentibus A & E, alterum tantummodo tangit in E, ideoque habetur tunc j casus, in quo hyperbola describenda mutatur in rectam. Quod si cadat R in M, quaelibet satisfacit, cujus focus in peripheria $e\omega E$, ut per se manifestum est, cum circuli tunc congruant.

Secundo supponatur vel centrum virium attractivarum mobile, vel centrum virium repulsivarum fixum in f (fig. 26). Radio fe describatur circulus eA, & ducatur Rf; tum radio RA secetur circulus $eF\omega$ in F & ω; erunt F, ω, foci binarum hyperbolarum problemati satisfacientium, earumque directiones MQ, Mq, arcus eF, $e\omega$, bissecabunt.

Demonstrat. Ob $FR = AR$, est $Rf - FR = Af = ef$. Similiter est $Mf - FM = ef$. Sunt igitur puncta M, R in hyperbola circa F de-

descripta, quam in M tangit recta MQ, cum sit $fMQ = QMF$. Eodem modo constat esse $fR - wR = fM - FM = ef$, & M & R pertinent ad hyperbolam MsR, quam in M tangit Mq, quod $fMq = qMw$.

Si R existeret in ePL, summa ex $MF + FR$ foret eadem cum MR, & circuli se se tangerent in F, & unicus jactus satisfaceret problemati. At vero R collocato extra ePL, nullus foret possibilis.

Scholium I. Si eadem hypothesis, quam attuli in scholio secundo problematis primi pro circulo, locum hic habeat (fig. 27) & detur v. g. punctum R feriendum; sumatur radius $Rf = MF$, & secetur circulus fFw in f & w; erunt hæc puncta centra circulorum LRM, lRM per R transeuntium, quod $fM = fL = fR$; & $wR = wM = wl$. Directio erit pro utrovis ad ML, vel Ml normalis, ut per se manifestum est.

Scholium II.

In parabola, si centrum virium ponatur in foco habente distantiam finitam a loco projectionis, limites nulli dantur. Solutio problematis II est sequens: centro M (fig. 29) loco nempe projectionis, radio MF, qui est altitudo, per quam cadendo acquiritur celeritas projectionis (per coroll. I Theor. V) describatur circulus, & alter radio FR centro R, qui (nisi R incidat in MF, etiam productam) semper secabit priorem. Ducantur tangentes utriusque circuli communes, & ex M, R ad puncta contactus radii RL, Ml; RŁ, Mł: ut etiam ex F perpendicula FA, $F\alpha$, quæ bissecta in S, s dant vertices duarum parabolarum per R transeuntium, quarum directiones sunt MQ, Mq, quæ (saltem in oppositum productæ) arcus lF, łF secant bifariam.

Demonstratione opus non est, cum ex constructione illico appareat, punctorum R & M distantias a directrice, & foco F utriusque æquales esse, nempe $FM = lM =$ łM, ac $FR = LR =$ ŁR.

Observandum isthic, hæc omnia subsistere, etsi R sit intra circulum radio MF, descriptum, modo sit extra ipsum MF. Nam e Geometria elementari constat, minimam lineam earum, quæ e puncto intra circulum, sed extra centrum posito, ad ejus peripheriam ducuntur, esse illam, quæ per centrum transeunti jacet in directum: unde FR, ea semper major erit, & circulus radio RF descriptus secare debet alterum. Quod si R cadat in MF, circuli se se tangunt, atque unicam

cam habent tangentem communem; hinc foco parabolæ in directricem incidente, parabola mutatur in rectam, directione jactus itidem in directum jacente cum MF.

Scholium III.

Cæterum si natura, & mutua sectionum conicarum cognatio rite perspiciatur, mirum haud videbitur, in foco finite distante posito centro gravitatis, parabolam non admittere limites, quos tamen habet, si centrum attractionis removeatur ad distantiam infinitam. Parabola non tam media est inter ellipses, & hyperbolas, quam ad utrarumvis genus æquali jure pertinet, ut facile demonstrari posset, si hic locus esset: & si quis de hoc ipso dubitet, sese illico convincet, si solverit sequens problema: *invenire locum Geometricum punctorum, quæ a puncto dato, & peripheria circuli dati æqualem semper habent distantiam.* Quod si enim punctum datum sit intra circulum datum, reperiet, locum quæsitum esse ellipsin; si extra, hyperbola: si centrum circuli dati abeat ad distantiam infinitam, & ejus peripheria in rectam, fueritque punctum datum intra circulum, seu ex eadem parte centri respectu rectæ, in quam mutata est peripheria, deprehendet, locum esse parabolam, eandemque rursus inveniet, si fuerit punctum datum extra circulum, seu ex altera parte rectæ respectu centri infinite distantis. Spectetur itaque parabola ut ellipsis, quæ tantummodo viribus attractivis describitur, & ponatur 1mo centrum attractionis in foco projectionis loco vicino: manifestum est ex ipsa figuræ vigesimæ primæ consideratione, cum sit DF: FM = FM: FE, seu in hac hypothesi o: FM = FM: ∞, tam circulum E*f*L, quam ellipsin EP*e* fieri infinite magnam, omnibus dimensionibus in infinitum crescentibus, ut adeo limites finiti haberi nequeant. At si secundo centrum attractionis sit in foco infinite distante, figura vigesima prima transit in schema vigesimum secundum, uti superius exposuimus. Consideretur parabola instar hyperbolæ, cujus opposita infinite distat, & ponatur centrum virium repulsivarum ad distantiam infinitam, quæ jam directionibus parallelis agent, poteruntque limites describi, uti clarum est ex Scholio II, quod corollariis Theor. V. subjecimus: idem quippe præstat hæc vis repulsiva quod attractiva ex parte opposita, & directionibus parallelis agens. Verum quemadmodum hyperbola circa illum focum, in quo est centrum virium repulsivarum, describi nequit vi repulsiva; ita neque

para-

parabola, circa focum, habentem diſtantiam finitam a loco projectionis, ſi in eo collocetur centrum virium repulſivarum.

Verum hæc ipſa conſideratio nos monet, ut paulo accuratius, quam problema exigeret, tum nexum ſectionum conicarum inter ſe, tum methodi, qua limites determinavimus, naturam perſequamur, quod tironibus exemplo ſit loca geometrica rite expendendi. Ellipſeon limites determinavimus per ellipſin (fig. 21) cujus axis primus eſt MF (diſtantia loci projectionis a centro virium) $+ 2ME$, & locus foci alterius f deprehenſus fuit peripheria circuli radio ME deſcripti. Quando focus F abit ad diſtantiam infinitam (fig. 22.) manente circulo radii EM, ellipſis mutata eſt in parabolam. At vero ſi parabola deſcribenda ſit manente centro virium attractivarum ad diſtantiam finitam, ob evaneſcentem DF, circulus fit infinite magnus, in cujus peripheria *ſunt foci f* (ſeu ut ellipſis ſeu ut hyperbola ſpectetur parabola) *ideoque* etiam limes nullus eſt, niſi ad diſtantiam infinitam. Denique (fig. 28.) dum FD jacet ex parte oppoſita cum FM, pariter EF ex oppoſita parte ſita eſt, conſequenter tum ipſa, tum ME (ratione analogiæ $FD : FM = MD : ME$) contrario affecta ſigno cenſenda eſt. Hinc ubi pro focis f parabolarum circulus infinitus fuit, pro hyperbolis ex infinita diſtantia iterum redit velut ex parte oppoſita: pro ellipſibus ipſe includebatur infra limites; aſt in reditu ex infinito contrarium obtinet: nulli quidem pro hyperbolis circa centrum virium attractivarum F deſcribendis habentur limites, ut habebantur pro ellipſibus; attamen ſuccedit alia limitum ſpecies pro hyperbolis oppoſitis, qui non quidem *includunt*, ſed tanquam ipſi negativi ſint, *excludunt* omne ſpatium, ad quod eæ hyperbolæ pertingere poſſunt. En ut res ſe habeat: Cum ME negativum ſit reſpectu MF, ſi (ut in ellipſeon limitibus determinandis factum eſt) pro longitudine axis ſumatur $2\,ME + MF$, reipſa habebitur $2\,ME - MF = E\varepsilon$, quæ ſemper erit major, quam diſtantia M & F; quare his focis, & hoc axe alia ſectio conica deſcribi nequit, quam ellipſis εPE. Hanc tangi ab omnibus hyperbolis oppoſitis illis, quæ circa F deſcribuntur, facile patet: ſit hyperbola *msc*; ducatur Mf occurrens ellipſi in P: agatur item recta FP. Quia $MP + PF = 2ME - MF = E\varepsilon$, eſt $MP + PN = ME = Mf$; hinc $PN = Pf$, & $FP - Pf = FN = FE$; igitur eſt P in hyperbola *msc*. Dein TP, quæ angulum FPf biſſecat, tam hyperbolam

perbolam *msc*, quam ellipsin *ϱ*PE tangit in P, ut per se clarum est; quare nullum aliud punctum hæ duæ curvæ habent commune.

Si detur extra perimetrum ellipseos *ϱ*PE punctum *q*, per quod hyperbolæ, focum in circulo *e* w E habentes, transire debeant, foci reperientur, si conjunctis *q* & F, radio *q æ* centro *q* circulus gæw; erunt *g* & w foci pro duabus hyperbolis per *q* transeuntibus, uti est *qrn*, quæ ellipsin in *p* tangit, ubi eidem occurrit M w.

Superessent sane adhuc non nulla consideratione digna, siquidem mutationes eas persequi per brevitatem nobis præfixam liceret, quæ in ellipsi *ϱ*PE ex mutata celeritate projectionis consequerentur; verum hæc cujuslibet meditationi relinquimus, cum loca geometrica ex professo hic non tractemus.

PROBLEMA III.

Dato scopo feriendo, centro virium, & loco projectionis, invenire directionem, & celeritatem jactus.

RESOLUTIO.

I. Pro Ellipsi. Sit (fig. 30.) locus projectionis M. Scopus in R, centrum virium attractivarum in F. Conjungantur MR, MF, FR, & bissecta MF in C, accipiatur in CM producta CE $= \frac{1}{2}$ (MR + RF); describatur centro M, radio ME arcus E*f*, qui bissecetur per MQ: erit directio jactus MQ; celeritas vero obtinebitur, si fiat FE: FM = FM: FD; exprimet MD altitudinem, per quam cadendo gravitate constante in M, velocitas quæsita acquiritur. Fig: 30.

Si enim focis M, F, axe majore MR + RF describatur ellipsis per R transiens, liquet, R esse in limite spatii, ad quod jactus celeritate acquisita lapsu ex altitudine MD pertingere potest, cujus directio sit MQ. Et si porro centro F, radio FE describatur arcus EA, cui in A occurrat FR producta, manifestum est, esse *f*R = R A, ex iis, quæ superius demonstrata sunt; consequenter circuli E*f*L, A*fg* se se tangunt in *f*. Quod si itaque tanta accurate sit celeritas, unico jactu scopus tangi poterit, at si tantillo augeatur, jam poterit, duplex ellipsis foco F describi, quæ per R transeat.

II. Pro Parabola. Sint omnia, ut prius (fig. 31.), nisi quod F abeat ad distantiam infinitam. Conjungantur puncta MR; radio RM, centro R, describatur arcus MK, quem in K tangat horizontalis BK; fiant item BML, KAR ad BK in B & K normales. Secetur BM in Fig: 31.

D bifariam

D bifariam: & ducatur per D recta DA ad BK parallela, quæ erit directrix parabolæ quæsitæ. Tum radio MD, ex M tanquam centro, descripto circulo D f L, erit intersectio f cum recta MR focus, ut patet, si præterea centro R, radio RA = Rf, describatur arcus Af. Acquiritur adeo celeritas lapsu libero per DM; & MQ. arcum Df bissecans, est jactus directio, R vero in parabola DRF limites definiente. Quod si proinde DM augeatur, jactus duplex fieri poterit, quo scopus tangatur.

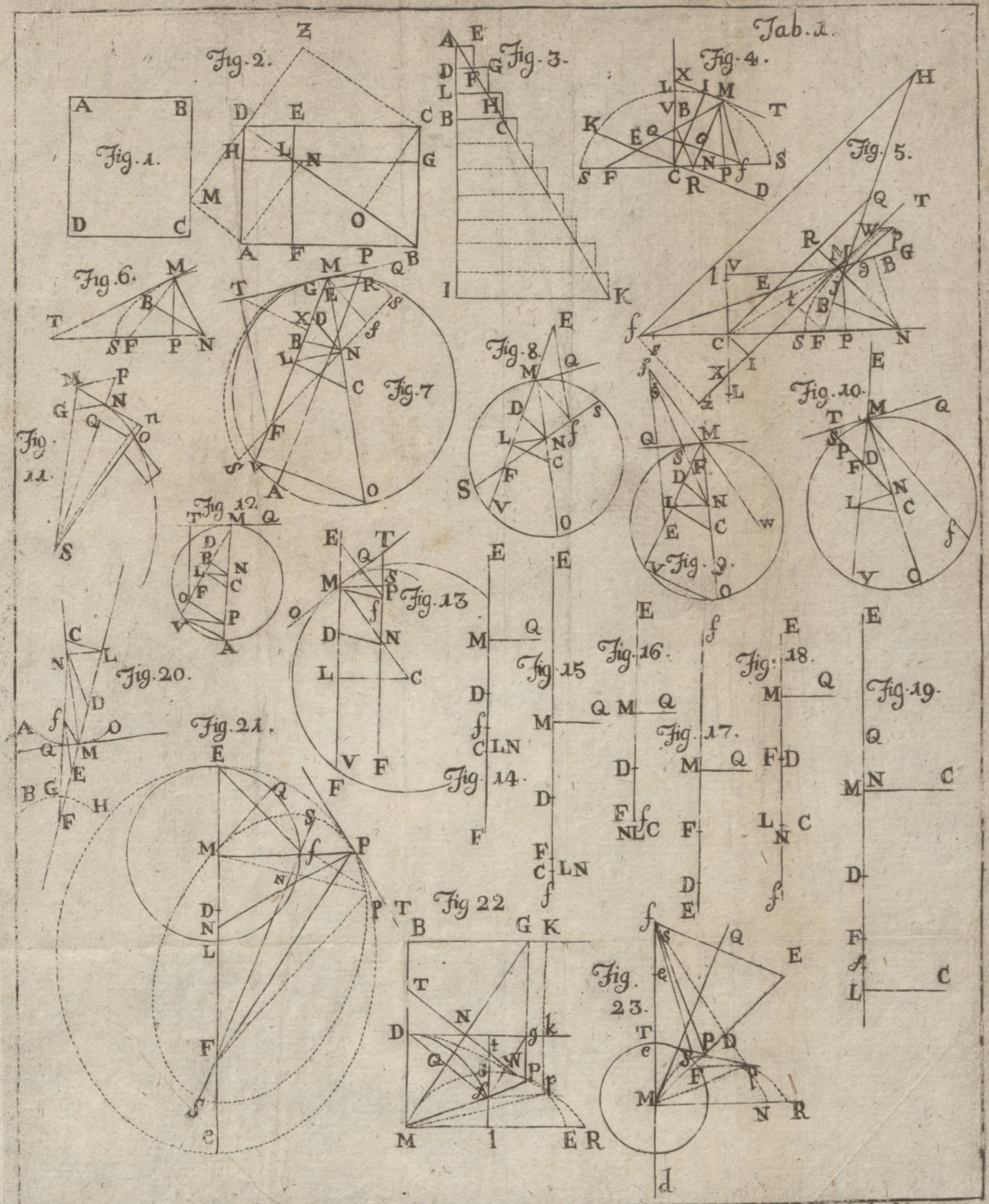
Fig: 32. III. Pro Hyperbola. Sit f (fig. 32.) virium repulsivarum centrum, M locus projectionis. Differentia rectarum fR, & MR (= fa = e E) accepta pro axe transverso, si describatur focis M, f, hyperbola ERP, ea per R transibit. Circulus centro M radio ME descriptus præbet focum F in recta MR; & si fiat fE: fM = fM: fD, erit MD spatium, per quod vi repulsiva constante in M recedendo ab f corpus acquirit celeritatem quæsitam. Denique recta MQ, arcum EF secans bifariam, erit directio pro hyperbola petita MRS. Hæc omnia e prioribus ita manifesta sunt, ut alia demonstratione non egeant. Aucta demum celeritate, bini habebuntur jactus per R transeuntes.

Observa. Si pro hyperbola detur centrum virium attractivarum, problema locum non habet, cum in hac hypothesi quavis celeritate scopus quivis tangi possit, ut problemate II dictum est, modo conditionem eam habeat, quam Coroll. I Theor. V exigit. Idem est de Parabola (per Schol. II Probl. II): datur quippe jam tum altitudo, per quam cadendo acquiritur celeritas sufficiens, nec differt ab ipsa distantia loci projectionis a centro virium, sive foco.

Scholium. Si petatur circulus, qui per scopum datum transeat, manifestum est, unicum esse circulum possibilem, cujus radius sit ipsa distantia centri a scopo; & celeritas acquiritur cadendo per dimidium radium; directio vero jactus est perpendicularis ad quemvis radium. Et tum quidem locus projectionis alter esse nequit, quam qui tantundem distet a centro, quantum scopus.

Demonstrabunt Religiosi Societatis JESU Metaphysici Nesvisienses
Die Junii 1766

* *V majus cursivum signi radicalis defectum supplet, quod bene in concursu Litterarum advertendum erit.*


Tab. 1.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig 22
Fig. 23.

Sculp. Neu.

Esta en arca

53